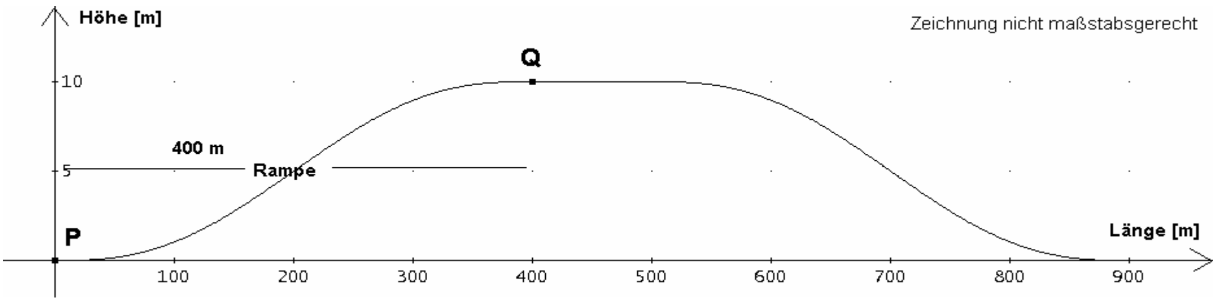
ANALYSIS 2

I.2 Überführung

Im flachen Friesland soll eine Bahnstrecke einen Kanal auf einer Brücke überqueren. Die Strecke auf der Brücke ist 100 m lang und verläuft ebenso horizontal wie die Strecken auf dem Boden. Die Strecke auf der Brücke liegt 10 m über dem Bodenniveau. Für den Übergang vom Boden auf die Brücke, die so genannte Rampe, haben die Bauplaner zunächst eine Rampenlänge $r = 400$ m in der Horizontalen vorgesehen. Die Steigungsstrecke links beginnt im Punkt P und endet im Punkt Q.



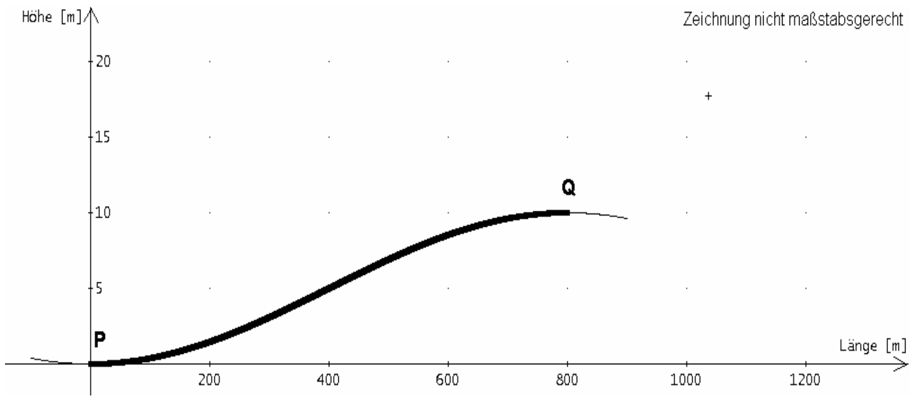
Ein Bahnexperte begutachtet die Planung und macht darauf aufmerksam, dass Eisenbahnstrecken eine maximale Steigung von 2,4 % aufweisen dürfen, damit die antreibenden Räder nicht rutschen.

a) Begründen Sie mit Argumenten aus der Anschauung, dass dieser Wert bei einer Rampenlänge von $r = 400$ m keinesfalls einzuhalten ist, unabhängig davon, wie die Rampentrasse geführt wird.

Die Rampenlänge r wird daraufhin in den weiteren Planungen auf **800 m** verlängert.

b) Ein Bauplaner vertritt die Idee, die Rampe darzustellen durch eine „getrimmte" Kosinusfunktion k vom Typ

$$k(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$$



- Begründen Sie, dass die gesuchte Darstellung durch die folgende Funktionsgleichung geliefert wird:

$$k(x) = -5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right) + 5.$$

- Bestimmen Sie die maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis.

Fortsetzung nächste Seite →

Wieder meldet der Eisenbahnexperte Bedenken an: Er behauptet, dass an den Übergangspunkten *P* und *Q* bei schneller Fahrt ein Ruck durch den Zug gehen würde, weil „Krümmungssprünge" vorlägen. Um das zu vermeiden, müssten deshalb die 1. und 2. Ableitung der aneinander stoßenden Trassen an den Übergangsstellen übereinstimmen.

c) Untersuchen Sie, weshalb bei dem Kosinus-Entwurf Krümmungssprünge auftreten.

d) Damit auch diese Bedenken des Eisenbahnexperten ausgeräumt werden können, soll nun die Rampe durch eine ganzrationale Funktion *h* dargestellt werden.

Um deren Koeffizienten handhabbar zu machen, verkürzen Sie den Maßstab in *x*-Richtung um den Faktor 800. Wählen Sie also jetzt für die Punkte *P* und *Q* die Koordinaten $\boldsymbol{P(0 \mid 0)}$ und $\boldsymbol{Q(1 \mid 10)}$. Berechnete Steigungen sind dann um den Faktor 800 zu groß, sie müssen deshalb für die <u>tatsächliche</u> Trasse durch 800 geteilt werden.

- Begründen Sie, dass die Funktion *h* mindestens den Grad 5 haben muss.
- Untersuchen Sie, welche der Koeffizienten von *h* Null sein müssen.
- Bestimmen Sie den Funktionsterm von *h*.

  (Zur Kontrolle: $h(x) = 60 \cdot x^5 - 150 \cdot x^4 + 100 \cdot x^3$)
- Bestimmen Sie die <u>tatsächliche</u> maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis.

e) Der Eisenbahnexperte ist nun zufrieden, aber den sparsamen Planern fällt auf, dass man die Rampe noch verkürzen könnte, ohne dass sie zu steil würde. Erläutern Sie einen mathematischen Weg, den man (bei Beibehaltung einer ganzrationalen Funktion 5. Grades) gehen könnte, um die minimal mögliche Rampenlänge *r* zu finden. Die Rechnungen sollen nicht ausgeführt werden.